Über Schwankungen der radioaktiven Umwandlung

von E. v. SCHWEIDLER

Nach den Vorstellungen, zu denen die Zerfallstheorie der radioaktiven Erscheinungen führt, sind die Atome einer aktiven Substanz instabile Gebilde, denen eine von ihrer Struktur abhängige « mittlere Lebensdauer » zukommt. Ist λdt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom innerhalb der Zeit dt eine Umwandlung erfährt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass es eine Zeit t überdauere, gleich $e^{-\lambda t}$ und $\tau = \frac{1}{\lambda}$ seine mittlere Lebensdauer. Bei einer sehr grossen Anzahl N gleichartiger solcher Atome wird daher, entsprechend dem Gesetz der grossen Zahlen, die Anzahl der nach der Zeit t noch vorhandenen Atome gegeben sein durch $n = Ne^{-\lambda t}$. Es ist selbstverständlich, dass bei einer geringen Anzahl von Atomen der tatsächliche Verlauf ihrer Verminderung von diesem idealen Gesetze abweichen wird, und es soll im Folgenden untersucht werden, ob die durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu ermittelnde « Streuung » die Grenzen empirischer Nachweisbarkeit erreichen kann.

Es seien N Atome einer Substanz mit der Abklingungskonstante λ gegeben; nach einer gewissen Zeit δ ist für ein bestimmtes einzelnes Atom die Wahrscheinlichkeit noch zu existieren gleich $e^{-\lambda\delta}$, die, inzwischen eine Umwandlung erfahren zu haben, gleich $1 - e^{-\lambda\delta} = \alpha$. Die Wahrscheinlichkeit, dass von den N Atomen die Anzahl x eine Umwandlung erfahren habe, die Anzahl $N-x$ unverwandelt erhalten geblieben sei, ist dann

$$W_x = \alpha^x (1-\alpha)^{N-x} \binom{N}{x}$$

Wie eine einfache Differentiation ergibt, ist

$$W_x = \text{Maximum für } x = \alpha N,$$

also der dem Abklingungsgesetz $n = Ne^{-\lambda t}$ entsprechende Wert ist der wahrscheinlichste. Es lässt sich aber auch die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass x von dem wahrscheinlichsten Werte αN um eine vorgegebene Grösse abweiche.

Dieses Problem ist ein in der Wahrscheinlichkeitsrechnung lange bekanntes, von Jakob *Bernouilli* angeregtes, von *Laplace* definitiv gelöstes. Bezüglich der Ableitung des Resultates verweise ich auf: Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften B*d* I, D 1, § 12, S. 755-757.

Es ergibt sich:

Dass x zwischen den Grenzen $\alpha N\,(1 \pm \varepsilon)$ liegt, hat die Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon \sqrt{\frac{N\alpha}{2(1-\alpha)}}} e^{-t^2} dt$$

Mit andern Worten: die Schwankungen der tatsächlich vorkommenden Werte x um den theoretischen Normalwert αN sind nach dem Fehlergesetze verteilt und die mittlere Schwankung (in Bruchteilen des Normalwertes) beträgt

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha N}}$$

Wählt man die Zeit δ klein gegen die mittlere Lebensdauer $1/\lambda$ eines Atomes, so ist α ebenfalls sehr klein, $1-\alpha$ nahezu gleich 1 und die Formel nimmt die Gestalt an:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{N\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{Z}}$$

D. h.: Die mittlere Schwankung ist nur abhängig von der Zahl Z, der Anzahl von Atomen, die bei strenger Giltigkeit des Gesetzes $n = Ne^{-\lambda t}$ innerhalb der Zeit δ zur Umwandlung gelangen würden, und zwar gleich der reciproken Wurzel aus dieser Zahl; es ist z. B. bei $Z = 10^6$, $\bar{\varepsilon} = 0.1\,\%$, bei $Z = 10^4$, $1\,\%$ *u. s. w.*

Es ist noch zu untersuchen, ob diese Abweichungen empirisch konstatierbar sind. Nach *Rutherford* (Radioactivity, S. 157 u. 243) kann man annehmen, dass bei α-strahlenden Substanzen jedes α-Partikel etwa 70000 Ionenpaare im Gase erzeuge, falls die Strahlung ganz absorbiert wird, somit ein Zeitintegral des Sättigungsstromes von $7\cdot10^4\cdot3{,}4\cdot10^{-10}$ = rund $24\cdot10^{-6}$ st. E hervorbringe. Die Schwankungen sind also beobachtbar, wenn die in der Zeit δ entladene Elektrizitätsmenge $Q = 24\cdot10^{-6}\,Z$ st. E auf den Bruchteil $\frac{1}{\sqrt{Z}}$ genau bestimmt werden kann.

Wie man sich durch Einsetzen numerischer Werte überzeugen kann, liegt die erforderliche Messgenauigkeit nicht ausserhalb der Grenzen des praktisch Erreichbaren. Bei einem Elektroskop z. B. von der *Elster-Geitel'* schen Form mit einer Kapazität von etwa 4 cm. und einer

Empfindlichkeit von $0.2 \frac{\text{pars}}{\text{volt}}$ kann die Entladungszeit für ein Intervall von 10 partes = 50 volt auf etwa 1 % genau bestimmt werden; diesem Intervalle entspricht eine entladene Elektrizitätsmenge $Q = 2/3$ st. E, somit $Z = \frac{1}{36} 10^6$ und $\bar{\epsilon} = 0{,}6$ %; die mittlere Schwankung ist also etwas kleiner als die unvermeidlichen Beobachtungsfehler. Eine Verringerung des Intervalles, über welches sich die Messung erstreckt, würde dieses Verhältnis ungünstig beeinflussen, da der Beobachtungsfehler linear, die Grösse $\bar{\epsilon}$ nur mit der Wurzel des Reciproken des Intervalles zunimmt.

Bei Anwendung des Quadrantelektrometers wird die erhöhte Empfindlichkeit der Potentialmessung durch die vergrösserte Kapazität teilweise kompensiert, immerhin dürfte sich das Verhältnis günstiger stellen. Am meisten Aussicht hat die Verwendung eines Elektroskopes nach C. T. R. *Wilson* (siehe *Rutherford*, Radioactivity, S. 73), das Empfindlichkeit mit geringer Kapazität verbindet.

Bisher wurde angenommen, dass jedes α—Partikel cirka 70000 Ionenpaare erzeugt; ist diese Zahl selbst ein Mittelwert, indem bald langsame Partikel von geringem, bald rasche von grossem Ionisierungsvermögen ausgesandt werden, so lagert sich über die Schwankung der Zahl der ausgesandten α—Partikel noch die Schwankung der Zahl der von ihnen erzeugten Ionen und die mittlere Abweichung $\bar{\epsilon}$ wird noch grösser.

Eine experimentelle Prüfung dieser Uberlegungen ist in Vorbereitung.

Wien, II physikal Institut der Universität, im Juni 1905.